Problemes proposats

1. Demostreu les següents propietats:

   (a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$, per a tot $n \in I\!N$.

   (b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, per a tot $n \in I\!N$.

2. Considerem les successions $a_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ i $b_n = \sqrt{\dfrac{a_{n-1}^2+b_{n-1}^2}{2}}$, amb primers termes a_0, b_0, $0 < a_0 < b_0$. Calculeu el límit de la successió

$$c_n = \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})a_n}{a_n-b_n}$$

3. Proveu que $x^2 - x\sin x = \cos x$ té exactament dues arrels.

Solucions als problemes proposats

Problema 1

Els dos apartats d'aquest problema es poden fer aplicant el principi d'inducció. De fet, aquesta és la intenció dels enunciats d'aquest problema.

(a) Hem de veure que $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Llavors, el nostre conjunt A serà

$$A = \{n \in I\!N /\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2\}$$

i la nostra propietat $p(n)$ és $p(n):\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$. Si volem aplicar el principi d'inducció, hem de veure,

i. El número 1 compleix la propietat $p(n)$, és a dir, que $p(1)$ és certa. Efectivament

$$p(1): \quad 1 = 1^2 = 1$$

ii. Si suposem que $p(k)$ és certa, aleshores hem de demostrar que $p(k+1)$ és també certa, per a tot $k \geq 1$. Vegem: suposem certa $p(k)$, és a dir

$$1+3+\ldots+(2k-1)=k^2$$

Vegem ara que $p(k+1):\ 1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$ també és certa a partir de la suposició anterior. Per això fem

$$1+3+\ldots+(2k-1)+(2k+1) = (1+3+\ldots+(2k-1))+(2k+1) \stackrel{Inducció}{=}$$

$$= k^2+(2k+1) = k^2+2k+1 = (k+1)^2$$

com volíem veure.

Per tant, hem demostrat que tot número n compleix la propietat $p(n)$. Llavors la propietat és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(b) Com abans, hem de veure que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, llavors

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / \ p(n): \ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$$

i. El número 1 compleix la propietat $p(n)$, és a dir, que $p(1)$ és certa. Efectivament

$$p(1): \quad 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

ii. Si suposem que $p(k)$ és certa, aleshores hem de demostrar que $p(k+1)$ és també certa, per a tot $k \geq 1$. Vegem: suposem certa $p(k)$, és a dir

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Vegem ara que $p(k+1): \ 1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3}{6}$ també és certa a partir de la suposició anterior. Per això fem

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 = \left(1^2+2^2+\ldots+k^2\right)+(k+1)^2 \overset{Inducció}{=}$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)\left(k(2k+1)+6(k+1)\right)}{6} = \frac{(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

com volíem veure.

Problema 2

La successió c_n es pot escriure així:

$$c_n = \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})a_n}{a_n-b_n} = \frac{(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n})(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})a_n}{(a_n-b_n)(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})} = \frac{(a_n-b_n)a_n}{(a_n-b_n)(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})} =$$

$$= \frac{a_n}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}$$

Aleshores, si a_n i b_n són successions convergents, c_n també ho serà, sempre que el denominador no s'anul·li. Vegem qui pot ser el límit de c_n. Suposem que les successions a_n i b_n són convergents, amb límits a i b respectivament. Aleshores

$$\lim a_n = \lim \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \quad \Longrightarrow \ a = \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow a = b$$

$$\lim b_n = \lim \sqrt{\frac{a_{n-1}^2+b_{n-1}^2}{2}} \quad \Longrightarrow \ b = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ \Longrightarrow \ b^2 = a^2$$

Aleshores, $a = b$, i, llavors

$$\lim c_n = \lim \frac{a_n}{\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}} = \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{a}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

Llavors hem de demostrar que a_n i b_n són convergents. Per això usarem

- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$.
- $b_n^2 = \dfrac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2}$.
- $2xy < x^2 + y^2$, per a qualssevol $x, y \in I\!R$.

Aleshores

(a) Vegem que, per a cada n, $a_n < b_n$. Efectivament,

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + 2a_{n-1}b_{n-1}}{4} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2} < \frac{1}{2}\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} = \\ &= \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} = b_n^2 \end{aligned}$$

d'on tenim

$$a_n^2 < b_n^2 \implies a_n < b_n, \quad \text{per a tot } n$$

(b) a_n és creixent i fitada superiorment.

Creixent. Vegem que $a_n > a_{n-1}$, per a tot n.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \overset{(*)}{>} \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2} = a_{n-1}$$

(*) apliquem l'apartat (a).

Fitada. Vegem que, per a tot n, $a_n < b_0$. Ho farem per inducció.

- Per a $n = 1$: $a_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} < \dfrac{b_0 + b_0}{2} = b_0$. Llavors, compleix.
- Suposem cert per a n, és a dir, suposem que $a_n < b_0$. Vegem que també es verifica $a_{n+1} < b_0$.

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \overset{Inducció}{<} \frac{b_0 + b_{n-1}}{2} \overset{(*)}{<} \frac{b_0 + b_0}{2} = b_0$$

(*) Aquí usem el fet que b_n és decreixent, cosa que demostrarem més avall, i, per tant, $b_n < b_0$ per a tot n.

Llavors, la successió està fitada superiorment per b_0.

Això demostra que la successió a_n és convergent. El seu límit li direm a.

(c) b_n és decreixent i fitada inferiorment.

Decreixent. Vegem que $b_n < a_{n-1}$, per a tot n.

$$b_n^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} \overset{(*)}{<} \frac{b_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} = b_{n-1}^2 \Longrightarrow b_n < b_{n-1}$$

(*) apliquem l'apartat (a).

Fitada. Vegem que, per a tot n, $b_n > a_0$.

$$b_n^2 = \frac{a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2}{2} \overset{(*)}{>} \frac{a_{n-1}^2 + a_{n-1}^2}{2} = a_{n-1}^2 > a_0$$

(*) apliquem l'apartat (a).
L'última desigualtat s'obté del fet que a_n és creixent, cosa que ja hem demostrat.

Això demostra que la successió b_n és convergent. Al seu límit li direm $b(= a$ com hem vist anteriorment).

Llavors, c_n també és convergent i el seu límit és $\frac{\sqrt{a}}{2}$.

Problema 3

Considerem la funció $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$, que és contínua i derivable en tot $\mathbb{R}$, perquè és suma de funcions contínues i derivables. Vegem que té, com a mínim, dos zeros. Per això apliquem el teorema de Bolzano en els següents intervals

$$\begin{array}{ll} \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right] & \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4} > 0 \text{ i } f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 - 2\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2}}{16} < 0 \\ \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] & \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2 - 2\sqrt{2}\pi - 8\sqrt{2}}{16} < 0 \text{ i } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4} > 0 \end{array}$$

amb la qual cosa, pel teorema de Bolzano, hi ha una arrel dins cada interval. Diguemlos a_1 i a_2. Vegem que no n'hi ha més.

Suposem que hi hagi una tercera arrel, b. Suposem que $b > a_2$. Aleshores, pel teorema de Rolle, hi ha un punt, c_1, entre a_1 i a_2 de manera que $f'(c_1) = 0$; i també hi ha un punt, c_2, entre a_2 i b de manera que $f'(c_2) = 0$. Però, la derivada de f és

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x(2 - \cos x)$$

que s'anul·la només en el punt $x = 0$. Això contradiu el fet que la primera derivada hauria de tenir dues arrels c_1 i c_2.

Per tant, no pot ser que hi hagi tres o més arrels de la funció $f(x)$.

NOTA: Si $a_1 < b < a_2$ es fa el mateix raonament agafant els intervals $[a_1, b]$ i $[b, a_2]$. I el mateix passa si $b < a_1 < a_2$, agafaríem els intervals $[b, a_1]$ i $[a_1, a_2]$.